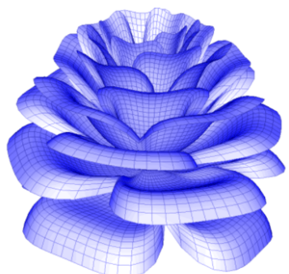
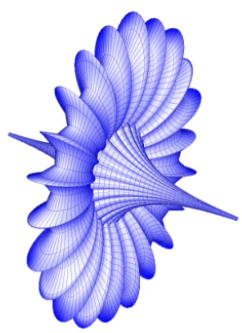
FACULTÉ CHIMIE L1 UEF Maths2

Chapitre 1 : Les intégrales



Imene Medjadj



0.1 Calcul de primitives

Définition 0.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction F est une primitive de f si et seulement si*

$$\forall x \in [a,b] : \quad F'(x) = f(x).$$

Définition 0.1.2 *Soit une fonction $f(x)$ continue sur $[a,b]$ et $F(x)$ une primitive de f. On note l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ par :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Propriétés de l'intégrale définie

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ avec $a \leq c \leq b$ (Relation de Chasles).
3. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
4. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}.$
5. Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

   Si $f \leq 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0.$
6. Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
7. On a $\displaystyle|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$
8. Si f est continue sur $[a,b]$ alors elle est intégrable sur $[a,b]$.
9. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$
10. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$
11. Si f est périodique, de période T alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$

0.2 Intégration par parties

Théorème 0.2.1 *Soient u et v deux fonctions de classe $C^1([a,b])$, alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

avec $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(b)$.

Exemple 0.2.2 *1.* $\int_0^{\pi} x\sin(x)$. *On pose (IPP) :*

$$u'(x) = \sin(x) \Rightarrow u(x) = -\cos(x)$$

$$et\, v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1.$$

Donc $I_1 = [-x\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)dx, \quad I_1 = \pi + [\sin(x)]_0^{\pi} = \pi.$

1. $I_2 = \int x\ln(x)dx$. *On pose (IPP) :*

$$u'(x) = x \Rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$et\, v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = 1/x.$$

Alors $I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx, \; I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c, c \in \mathbb{R}.$

2. $I_3 = \int arctan(x)dx$, *on pose (IPP) :*

$$u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$$

$$et\, v(x) = arctg(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Alors $I_3 = xarctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}.$

0.3 Changement de variables

Théorème 0.3.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I *et* $g : J \to I$ *une bijection de classe* C^1 *alors*

$$\forall a, b \in J : \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt.$$

On pose $x = g(t)$ alors $dx = g'(t)dt$.

Exemple 0.3.2 *1.* $I_1 = \int (\sin(x))^{303}\cos(x)dx$, *On effectue le (C.V) changement de variable suivant, on pose*

$$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)dx.$$

Ainsi I_1 *devient :*

$$I_1 = \int t^{303}dt = \frac{t^{304}}{304} + c = \frac{(\sin(x))^{304}}{304} + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \int \frac{1}{x\ln(x)}dx$, *(C.V) : on pose*

$$t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx.$$

Ainsi I_2 *devient :* $I_2 = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln|\ln(x)| + c, c \in \mathbb{R}.$

0.4 Intégration des fractions rationnelles

Décomposition en éléments simples et intégrations

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes où le degré de $P(x)$ est inférieur strictement à celui de $Q(x)$ (sinon on fait la division euclidiènne).

1. Si $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$
Ainsi
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A_1 \ln |x - a_1| + A_2 \ln |x - a_2| + \dots + A_n \ln |x - a_n| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
2. Si $P(x) = 1$ et $Q(x) = (x - a)^k$, alors
$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \ln |x - a|, \quad si \quad k = 1 & ; \\ \frac{1}{1-k}(x - a)^{1-k} + c \quad c \in \mathbb{R}, si \quad k \neq 1 & . \end{cases}$$
3. Si $Q(x) = (x - a)^{k_1}(x - b)^{k_2} \dots (x - c)^{k_n}$, alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a)^{k_1}} + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - b)^{k_2}}$$
$$+ \frac{C_1}{x - c} + \frac{C_2}{(x - c)^2} + \dots + \frac{C_{k_n}}{(x - c)^{k_n}}$$
4. Si $Q(x) = ax^2 + bx + c$ dans ce type on a trois cas
   - Si le dominateur admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 alors $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. D'où
   $$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2}$$
   ainsi
   $$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx = A_1 \ln |x - x_1| + A_2 \ln |x - x_2| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$
   - Si le dominateur admet une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$, alors
   $$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2}$$
   ainsi
   $$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx = A_1 \ln |x - x_0| - \frac{A_2}{x - x_0} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$
   - Si le dominateur n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$, alors on écrit
   $$\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \frac{\gamma}{ax^2 + bx + c}.$$
   On fait un changement de variable $u(x) = u$ tel que
   $$\frac{\gamma}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{u^2 + 1}.$$
   Ainsi
   $$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \ln |ax^2 + bx + c| + A \arctan(u) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

5. Si $Q(x) = (x - x_0)^k(ax^2 + bx + c)$, alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_0)^k} + \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$$

Après on décompose $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ en éléments simple suivant le cas précédent.

6. Si $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^k$, alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A\frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^k} + \frac{B}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

pour le cas où le dominateur n'admet pas racines dans $\mathbb{R}$ alors on fait un changement de variable $u(x)$ dans la deuxième fraction ($\frac{B}{(ax^2+bx+c)^k}$) tel que

$$\frac{B}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{C}{(u^2 + 1)^k}.$$

Ainsi
Si $k = 1$ alors

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = A \ln |ax^2 + bx + c| + C \arctan(u) + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Si $k \neq 1$ alors $\int A\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \dfrac{A}{1-k}(ax^2 + bx + c)^{1-k}$
et

$$\int \frac{B}{(ax^2 + bx + c)^k}dx = \int \frac{C}{(u^2 + 1)^k}dx = I_k.$$

On calcule cette intégrale par récurrence : on fait une intégration par partie qui permet de passer de I_{k-1} à I_k.

Exemple 0.4.1 *1.* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^+2x + 3} = \int \frac{dx}{(x + 2)(x + 1)}$, *On décompose la fraction en éléments simples, c'est à dire on cherche a et b tels que :*

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2}.$$

Pour calculer ***a****, on multiplie les deux membres par* $(x + 1)$*, on obtient*

$$\frac{1}{(x + 2)} = a + \frac{b(x + 1)}{x + 2}$$

on tend $x \to -1$ *alors*

$$1 = a.$$

Pour calculer ***b****, on multiplie les deux membres par* $(x + 2)$*, on obtient*

$$\frac{1}{(x + 1)} = \frac{a(x + 2)}{x + 1} + b$$

on tend $x \to -2$ *alors*

$$-1 = b.$$

(On peut utiliser l'indentification)

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}=\frac{x(a+b)+b+2a}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0, \\ b+2a=1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow a=1, b=-1$$

(On peut aussi remplacer deux valeurs de x pour obtenir deux équations à deux inconnus)

$$x=0: \frac{1}{2}=a+\frac{b}{2}, x=1: \frac{1}{6}=\frac{a}{2}+\frac{b}{3} \Rightarrow a=1, b=-1.$$

$$I_1=\int \frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{x-2},$$

$$I_1=\ln|x+1|-\ln|x-2|+c, c\in \mathbb{R}.$$

2. $I_2=\frac{1}{x^2(x-1)}$, *On décompose la fraction en éléments simples,*

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{(x-1)}$$

même principe

$$c=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2}=1, b=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1,$$

mais pour a on peut pendre $x=-1$ car c'est bien définie en -1 , on remplaçe dans les membres.

$$a=-1, b=1, c=1.$$

Ainsi

$$I_2=-\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{x}+c, c\in \mathbb{R}.$$

3. $I_3=\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$ *on remarque* $(x^2+2x+2)'=2x+2$
Ainsi $I_3=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|+I'$,
$I'=\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx$ *sachant que* $\Delta<0$ *on écrit le dénominateur sous la forme* u^2+1,
$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ *Ainsi on pose* $u=(x+1)\Rightarrow du=dx$.
$I'=2\int \frac{1}{1+u^2}du=2arctg(u)+c; c\in \mathbb{R}$

$$I_3=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|+2arctg(1+x)+c.$$

4. $I_4=\int \frac{x^4+1}{x^3+x}dx$. *On fait une division euclidienne* $x^4+1=x(x^3+x)-x^2+1$, *ainsi* $I_4=\int xdx-\int \frac{-x^2+1}{x^3+x}dx=x^2/2-\underbrace{\int \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}dx}_{J}$. *sachant que* $\Delta<0, x^2+1$ *On décompose :*

$$\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$a = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)} = 1$. *Pour* b, c *deux inconnus on remplaçe par deux valeurs* $x = 1, x = -1$ *on retrouve un système à deux équations* $0 = 1 + \frac{b+c}{2} \wedge 0 = -1 + \frac{-b+c}{2}, b = -2, c = 0$

$$J = \ln|x| - \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$I_4 = x^2/2 - \ln|x| + \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

5. $I_5 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}$ *On décompose :*

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

$$a = \lim x \to 1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}, b = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$$

Ainsi

$$I_5 = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan(x) + c.$$

0.5 Intégration des fonctions trigonométriques

- **Méthode 1 : Les règles de Bioche**
  On pose $\omega(x) = f(x)dx$, on a alors
  $\omega(-x) = -f(-x)dx$
  $\omega(\pi - x) = -f(\pi - x)dx$.
  1. Si $\omega(-x) = \omega(x)$, alors on fait un changement de varialble tel que on pose $u(x) = \cos x$.
  2. Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, alors on fait un changement de variable tel que on pose $u(x) = \sin x$.
  3. Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, alors on fait un changement de variable tel que on pose $u(x) = \tan x$.
- **Méthode 2 :** on fait un changement de variable suivant : $t = \tan\frac{x}{2}$, alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Exemple 0.5.1 1. $I_1 = \sin(x)\cos^2(x)dx$ *on pose* $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx$ I_1 *devient* $I_1 = -\displaystyle\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{\cos^3(x)}{3} + c$.

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)dx$, *on pose* $t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)dx, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \pi/2 \Rightarrow t = 1$ I_2 *devient* $I_2 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)dt = [t - \frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$.

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x^3)dx$ *on pose* $t = \tan(x) \Rightarrow x = \arctan(t) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \pi/4 \Rightarrow t = 1$ *Ainsi* I_3 *devient*

$$I_3 = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t(1+t^2)-t}{1+t^2}dt = \int_0^1 tdt - \frac{1}{2}\int_0^1 2t1+t^2dt = [\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\ln(2).$$

4. $I_4 = \int \frac{1}{1+\sin(x)} dx$ *on pose n pose* $t = \tan \frac{x}{2}$, *alors*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$I_4 = \int \frac{1}{1 + \dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = -\frac{2}{1+t} + c.$$

0.6 Intégration des fonctions Rationnelles

1. Intégrale de type $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})dx$, où R est une fonction rationnelle.
   On cherche le dénominateur commun entre $n, \ldots, s$ on le note k. En suite, on fait le changement de variable :
   $$x = t^k \text{ alors } dx = kt^{k-1}dt.$$
2. Intégrale de type $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, \ldots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}})dx$
   On pose $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ avec k le dénominateur commun entre $n, \ldots, s$.
3. Intégrale de type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ avec $a \neq 0$

   i Si $a > 0$ on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$ alors
   $$ax^2 + bx + c = ax^2 + t^2 \pm 2\sqrt{a}xt \ \text{ d'où } x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}.$$

   ii Si $c > 0$ On pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ alors $x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$.

   iii Si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ α, β alors on pose
   $$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t \text{ ou } \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)t.$$

Exemple 0.6.1 *1.* $I_1 = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$, *le* $PGCD(3, 2) = 6 = k$ *on pose* $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$.

$I_1 = 6 \int \frac{t^3}{t^2+1} t^5 dt$ *On fait une division euclidienne* $t^8 = (1+t^2)(t^6 - t^4 + t^2 - 1) + 1$. *Alors*

$$I_1 = 6\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} + 6\frac{t^3}{3} - 6t + 6\int \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$I_1 = 6\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} + 6\frac{t^3}{3} - 6t + 6arctg(t) + c.$$

$$I_1 = 6\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - 6\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + 6\frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6arctg(x^{\frac{1}{6}}) + c$$

2. $I_2 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ *on pose* $t^2 = x - 1 \Rightarrow 2tdt = dx$,

$$I_2 = \int \frac{t}{t^2+1} 2tdt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt$$

$$I_2 = 2t - 2arctg(t) + c = 2\sqrt{x-1} - 2arctg(\sqrt{x-1}) + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, a > 0$ *on pose* $\sqrt{x^2+1} = x + t \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 + 2xt + t^2.$

$$x = \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow dx = -\frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$I_3 = -\ln|t| + c = -\ln|\sqrt{x^2+1} - x| + c.$$

4. $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$ *sachant que* $\Delta \geq 0$ *on choisit l'une des racines on pose*

$$\sqrt{x^2+x-2} = (x-1)t \Rightarrow x = \frac{t^2+2}{t^2-1} = 1 + \frac{3}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow dx = -6\frac{t}{(t^2-1)^2}dt.$$

$$I_4 = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln|1+t| - \ln|1-t| + c.$$

$$I_4 = \ln|1 + \sqrt{|\frac{x+2}{x-1}}| - \ln|1 - \sqrt{|\frac{x+2}{x-1}}| + c.$$

Chapitre 2 : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES" Module : Mathématiques 2 (ST/L1 2019/2020

Dr. Medjadj Imene

31 mai 2020

Chapitre 1

Équations différentielles

1.1 Définitions

Dans la suite on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 1.1.1 *On appelle équation différentielle d'ordre n, toute relation F entre x, y et les dérivées de y donnée par*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Toute fonction $y(x)$ verifiant $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ est appelée solution de l'équation différentielle.

Définition 1.1.2

1. *Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i, pour $i = 0, \ldots, n$ et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

2. *Une équation différentielle linéaire d'ordre n est dite homogène, ou sans second membre si la fonction g est nulle :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y" + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0.$$

3. *Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si*

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' + \cdots + a_ny^{(n)} = g(x)$$

où les a_i, pour $i = 0, \ldots, n$ sont des constantes et g est une fonction réelle continue.

Proposition 1.1.3 *Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentille linéaire homogène :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

alors $\forall \lambda, \mu,\ \lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène forme un espace vectoriel.

1.2 Equation différentielle du premier Ordre

Définition 1.2.1 *Une équation différentille du premier ordre est de la forme :*

$$y' = f(x, y)$$

où f est une fonction continue par rapport à x sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1.2.1 Equation différentielle à variables séparables

On appelle équation différentielle à variables séparables une équation de la forme :

$$y' f(y) = g(x) \tag{1.1}$$

où f, g sont des fonctions continuent sur I.

Méthode de résolution
Sachant que $y' = \frac{dy}{dx}$, alors

$$\frac{dy}{dx} f(y) = g(x) \quad \Rightarrow f(y)dy = g(x)dx \Rightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Exemple 1.2.2
1. $y' = e^{-y} \Rightarrow e^y dy = dx \Rightarrow e^y = x + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \ln|x + c|$.
2. $(x^2 + 1)dy = 2x(y^2 + 1)dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

$$\Rightarrow arctg(y) = \ln(x^2 + 1) + c \Rightarrow y = \tan(\ln(x^2 + 1) + c), c \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Equation différentielle Homogène

1. Premier cas : une équation différentielle homogène est une équation de la forme :

$$y' = F(\frac{y}{x}).$$

Méthode de résolution
On pose $t = \frac{y}{x}$ ainsi

$$y = tx \Rightarrow y' = t + xt' \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x}) \Rightarrow t + xt' = F(t) \Rightarrow F(t) - t = \frac{dt}{dx} x$$
$$\Rightarrow \frac{dt}{F(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Il ne reste plus qu'a résoudre l'équation différentielle à variable séparables :$\frac{dt}{F(t)-t} = \frac{dx}{x}$.

Exemple 1.2.3

1. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\cos(\frac{y}{x})}$ *en posant :*

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t + t'x$$

on retrouve

$$(t + t'x) = t + \frac{1}{\cos(t)} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos(t)} \Rightarrow \cos(t)dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \cos(t)dt = \int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \sin(t) = \ln|x| + c \Rightarrow t = \arcsin(\ln|x| + c),\ c \in \mathbb{R}$$

enfin $y(x) = x \arcsin(\ln|x| + c)$.

2. $xy' = y + x$ *en posant :*

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t + t'x$$

on retrouve

$$x(t + t'x) = tx + x \Rightarrow t'x + t = t + 1 \Rightarrow t'x = 1 \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

ainsi $t = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$ *d'où*

$$y(x) = x \ln|x| + cx.$$

2. Second cas : une équation différentielle homogène est une équation de la forme :

$$E_h : y' + a(x)y = 0.$$

Où a est continue sur I.

Méthode de résolution

(E_h) est une équation à variable séparables en effet :

$$y' = -a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = \int -a(x)dx + c, c \in \mathbb{R}$$

d'où la solution générale de (E_h) est donnée par

$$y_h = Ke^{-\int a(x)dx}, k = \pm e^c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.4

1. $y' - ye^x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ye^x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int e^x dx \Rightarrow \ln|y| = e^x + c, c \in \mathbb{R}, \Rightarrow y = Ke^{e^x}, K = \pm e^c$.
2. $y' - y\cos(x) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cos(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cos(x)dx \Rightarrow \ln|y| = \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}, \Rightarrow y = Ke^{\sin(x)}, K = \pm e^c$.

1.2.3 Equation différentielle linéaire

On appelle une équation différentielle linéaire une équation de la forme :

$$E : y' + a(x)y = b(x).$$

Où a, b sont des fonctions continuent sur I.

Méthode de résolution
La solution générale de (E) est donnée par $y_g = y_h + y_p$ avec y_h est la solution de l'équation homogéne (E_h) et y_p et la solutions particulière.

Méthode la variation de la constante :
on $y_h = kf(x)$ où $f(x) = e^{-\int a(x)dx} = F$ la méthode consiste à faire varier la constante k c'est à dire la constante k devient la fonction à trouver $k(x)$ avec $y_p = k(x)F$ on remplaçant dans (E) et donc

$$y'_p = k'(x)F + F'k(x) \Rightarrow k'(x)F + F'k(x) + a(x)k(x)F = b(x) \Rightarrow k'(x)F = b(x)$$

car $F' + a(x)F = 0$on retrouve

$$y_p = (\int \frac{b(x)}{F}dx)F$$

Exemple 1.2.5

1. *$y' - y = e^x ...(E)$ on commence par résoudre l'équation homogène $(E_h) : y' - y = 0$ on a :*

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow \ln|y| = x + c, c \in \mathbb{R}, \Rightarrow y = Ke^x, K = \pm e^c.$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose $y(x) = k(x)e^x \Rightarrow k'(x)e^x + k(x)e^x$.
En remplaçant dans (E) on aura :

$$k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = e^x \Rightarrow K'(x) = 1 \Rightarrow k(x) = x,$$

alors la solution particulière est donc donnée par $y_p(x) = xe^x$.
Enfin, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par $y(x) = ke^x + xe^x$.

2. *$y' + 2ty = 2t...(E)$ on commence par résoudre l'équation homogène $(E_h) : y' + 2ty = 0$ on a :*

$$\frac{dy}{dt} = -2ty \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 2tdt \Rightarrow ln|y| = -t^2 + c \Rightarrow y = ke^{-t^2}, k = \pm e^c$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose

$$y(t) = k(t)e^{-t^2} \Rightarrow y' = k'(t)e^{-t^2} - 2tk(t)e^{-t^2}.$$

En remplaçant dans (E) *on aura :*

$$k'(t)e^{-t^2} - 2tk(t)e^{-t^2} + 2tk(t)e^{-t^2} = 2t \Rightarrow k(t) = \int 2te^{t^2}dt = e^{t^2},$$

la solution particulière est donnée par

$$y_p = e^{t^2}e^{-t^2} = 1$$

Enfin, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$y(t) = ke^{-t^2} + 1,$$

avec $y(0) = 0$ *ainsi* $k = -1$ *alors*

$$y(t) = 1 - e^{-t^2}.$$

1.2.4 Equation de Bernoulli

On appelle une équation de Bernoulli une équation de la forme :

$$E_b : y' + a(x)y = b(x)y^n, n \neq 0 \text{et} \quad n \neq 1.$$

Méthode de résolution

On divise (E_b) par y^n on aura :

$$y'y^{-n} + a(x)y^{1-n} = b(x),$$

puis on pose $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y'y^{-n}$ on obtient une équation différentielle du premier ordre (E) en z sous la forme :

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z = b(x).$$

Exemple 1.2.6 *$y' + 2xy = xy^2$ c'est une différentielle de Bernoulli, on divise (E_b) par y^2 on aura :*

$$y'y^{-2} + 2xy^{-1} = x,$$

puis on pose $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y'y^{-2}$ on obtient une équation différentielle du premier ordre (E) en z sous la forme :

$$-z' + 2xz = x...(E).$$

On commence par résoudre l'équation homogène

$$(E_h) : -z' + 2zx = 0$$

on a :

$$\frac{dz}{dx} = 2zx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int 2xdx \Rightarrow ln|z| = x^2 + c \Rightarrow z = ke^{x^2}, k = \pm e^c$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose

$$z(x) = k(x)e^{x^2} \Rightarrow z' = k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2}.$$

En remplaçant dans (E) *on aura :*

$$-k'(x)e^{x^2} - 2xk(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2} = x \Rightarrow k(x) = \int -xe^{-x^2}dx.$$

On calcule $k(x) = \frac{e^{-x^2}}{2}$. *alors la solution particulière est donnée par*

$$z_p(x) = \frac{e^{-x^2}}{2}e^{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$z(x) = ke^{x^2} + \frac{1}{2}.$$

Enfin sachant que $y(x) = (z(x))^{-1}$ *la solution de* (E_p) *est donnée par*

$$y(x) = (ke^{x^2} + \frac{1}{2})^{-1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.3 Equation différentielle du second ordre

Soit (E) l'équation différentille du second ordre donnée par

$$E : \ y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

où a, b, f sont des fonctions continues sur I.

Définition 1.3.1 1. *On dit que* (E) *est une équation différentille du second ordre à coefficients contants si elle est de la forme :* $y'' + ay' + by = f(x)$, *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, *étant des constantes.*

2. *L'équation homogéne à* (E) *est* (E_h) *donnée par* $y'' + ay' + by = 0$.
3. *On appelle équation caractéristique associée à* (E_h) *l'équation définie par :*

$$E_r : \ r^2 + ar + b = 0, \quad r \in \mathbb{C}.$$

1.3.1 Résolution homogène (E_h)

Théorème 1.3.2 *Soit y_1, y_2 deux solutions particulières de (E_h) linéairement indépendantes, alors la solution générales de (E_h) est donnée par*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (E_r)

Théorème 1.3.3

1. *Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E_r) admet deux solutions r_1, r_2 ainsi la solution de (E_h) est donnée par*

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E_r) admet une solution double $r_1 = r_2 = r$ ainsi la solution de (E_h) est donnée par*

$$y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E_r) admet deux solutions complexes $r_1 = r + i\alpha, r_2 = r - i\alpha, \alpha, r \in \mathbb{R}$ ainsi la solution de (E_h) est donnée par*

$$y_h = c_1 e^{rx} \cos(\alpha x) + c_2 e^{rx} \sin(\alpha x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.3.4

1. $y'' + y' - 6y = 0 ...(E)$ *commençons par déterminer équation caractéristique associée à (E_h) qui définie par*

$$E_r : r^2 + r - 6 = 0$$

les solutions de cette équations sont : $2, -3$ *des solutions simples ainsi la solution de cette équation du second ordre est donnée comme suit*

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $y'' + 2y' + y = 0 ...(E)$ *l'équation caractéristique associée est*

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

admet une solution double $r = -1$, alors la solution est donnée par

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = (c_1 + c_2 x) e^{-x}, c_c, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' + y = 0 ...(E_h)$ *l'équation caractéristique associée est*

$$r^2 + 1 = 0$$

admet comme solutions simples $r_1 = 0 + i, r_2 = 0 - i$, alors la solution est donnée par

$$y(x) = e^{0.x}[c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)] = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. *$y'' + y' + y = 0 ... (E_h)$ l'équation caractéristique associée est*

$$r^2 + r + 1 = 0$$

admet comme solutions simples $r_1 = \sqrt{3}i, r_2 = -\sqrt{3}i$, alors la solution est donnée par

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.3.2 Résolution d'une Équations du second ordre à coefficients constants (E) : $y'' + ay' + by = f(x)$

Soit $y_g = y_h + y_p$ la solution générale de (E) est la somme de la solution de l'equation homogème et la solution particulière. La recherche de la solutions particulière est résumée dans le tableau suivant :

$f(x)$	Racines de l'équation caractéristique (E_r)	Solution particulière
$P_n(x)$	0 n'est pas une solution de (E_r)	$y_p = \tilde{P}_n(x)$
$P_n(x)$	0 est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x^\omega \tilde{P}_n(x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	α n'est pas une solution (E_r)	$y_p = \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	α est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x^\omega \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$	$\pm i\beta$ n'est pas une solution (E_r)	$y_p = \tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x)$
$P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$	$\pm i\beta$ est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x^\omega(\tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x))$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$	$\alpha \pm i\beta$ n'est pas une solution (E_r)	$y_p = e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x))$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$ Avec $k \max(n, m)$	$\alpha \pm i\beta$ est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x^\omega e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x))$

Avec $P_n(x), \tilde{P}_n(x)$ sont des polynômes de degré n et $Q_m(x), \tilde{Q}_m(x)$ sont polynôme de degré m.

Remarque 1.3.5 *Le cas ou le second membre* $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$ *résume tous les autres cas, en effet :*

Pour $r = 0 = 0 + 0i, \alpha = \beta = 0$, *c'est le premier cas ou* $f(x) = P_n(x)$.

Pour $r = \alpha + i.0$, *un réel* $\beta = 0$ *c'est le cas ou* $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$.

Pour $r = i\beta$, *un imagnaire pure* $\alpha = 0$ *c'est le cas ou* $f(x) = P_k(x)\cos(\beta x) + Q_k(x)\sin(\beta x)$.

Exemple 1.3.6

1. $y'' + y' - 6y = 6x ...(E)$ *sachant que la solution de*
$$(E_h) : y'' + y' - 6y = 0$$
est donnée comme suit $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *la solution générale de* $(E), y_g = y_h + y_p$.
Nous allons utiliser le tableau précédent dans la partie cours, c'est à dire suivant y_p *dépend du second membre de* (E), $\quad f(x) = 6x$, *ainsi* $y_p = P_1(x)$,
0 ***est-elle une solution de*** $(E_r) : r^2 + r - 6 = 0$? *la réponse est* ***non****, alors* y_p *est un polynôme du même degré que* $f(x)$, *de la forme suivante*
$$y_p = ax + b$$
pour trouver y_p *en fait il faut trouver* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* y_p *vérifie* (E). *En remplaçant dans* (E) *on aura :*
$$a = -1, b = -1/6, y_p = -x - 1/6$$
ainsi la solution de (E) *est :*
$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - x - \frac{1}{6}$$

2. $y'' + y' - 6y = e^{2x} ...(E)$ *sachant que la solutionde* $(E_h) : y'' + y' - 6y = 0$ *est donnée comme suit* $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *comme le second membre de* (E) *est* $f(x) = e^{2x}$ *et* 2 ***est-elle une solution de*** $(E_r) : r^2 + r - 6 = 0$? *la réponse est* ***oui****, alors* y_p *est sous la forme* $x^1 P_0(x)e^{2x}$, *de la forme suivante*
$$y_p = axe^{2x}$$
pour trouver y_p *en fait il faut trouver* $a \in \mathbb{R}$ *tels que* y_p *vérifie* (E)
$$y' = ae^{2x} + 2xae^{2x}, y'' = e^{2x}[2a + 2a + 4ax]$$
$$e^{2x}[4a + 4ax] + ae^{2x} + 2xae^{2x} - 6axe^{2x} = e^{2x}$$
ainsi $a = \frac{1}{5}$ *la solution*
$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{x}{5}e^{2x}.$$

3. $y''+y=e^x$, *la solution est* $y_h=c_1\cos(x)+c_2\sin(x), c_1,c_2\in\mathbb{R}$. *Suivant le tableau* y_p *est sous la forme* ae^x *car* 1 *n'est pas une solution de* (E_r).
Pour trouver a *en remplace dans* (E), $a=1/2$ *ainsi*

$$y_p=\frac{1}{2}e^x, y_g=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)+\frac{1}{2}e^x.$$

4. $y''+y=\sin(x)$, *la solution est* $y_h=c_1\cos(x)+c_2\sin(x), c_1,c_2\in\mathbb{R}$. *Suivant le tableau* y_p *est sous la forme* $y_p=x(a\sin(x)+b\cos(x))$, *car* i *est une solution simple de* (E_r), *pour trouver* a,b *on remplace dans* (E), $a=-1/2, b=0$,

$$y_p=-\frac{x}{2}\cos(x), y_g=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x).$$

Donner l'expression des solutions particulières :

1. $y''-y'-2y=e^{2x}$, *les racines de* $(E_r): r^2-r-2=0$ *sont* $r_1=-1, r_2=2$ *ainsi*

$$y_p=xae^{2x}$$

2. $y''-2y'+y=xe^x$, $(E_r): r^2-2r+1=0$ *admet la racines double est* $r=1$, *ainsi*

$$y_p=x^2(ax+b)e^x.$$

3. $y''+y=x^2e^x\sin(x)$; $(E_r): r^2+1=0$ *admet les racines* $r_1=i, r_2=-i$, *sachant que* $1\pm i$ *n'est pas une racines de* (E_r), *alors*

$$y_p=e^x[(ax^2+bx+c)\sin(x)+(dx^2+ex+f)\cos(x).$$

4. $y''+2y'+y=e^x+\sin(x)$; $(E_r): (r+1)^2=0$, *admet une racine double* $r=-1$,*la solution particulière est donnée par*

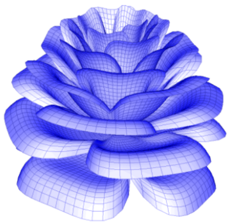
$$y_p=y_{p1}+y_{p2}, \text{ le principe de superposition.}$$

où y_{p1} *est la solution particulière de* $(E_1): y''+2y'+y=e^x$, *sachant que* 1 *n'est pas solution de* (E_r) $y_{P1}=ae^x$.
et y_{P2} *est la solution de* $(E_2): y''+2y'+y=\sin(x)$, *sanchant* i *n'est pas aussi une racine de* (E_r) *donc* $y_{P2}=a\sin(x)+b\cos(x)$.

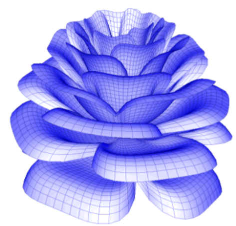
5. $y''+4y=x\sin(2x)+xe^{2x}\cos(x)$, *la solution de* $(E_r): r^2+4=0$, *est* $2i,-2i$ *donc comme précédement* $y_p=y_{P1}+y_{P2}$, *où* y_{p1} *est la solution particulière de* $(E_1): y''+4y=x\sin(2x)$, *sachant que* $2i$ *est une solution de* (E_r) $y_{P1}=x((ax+b)\cos(2x)+(cx+d)\sin(2x))$.
et y_{P2} *est la solution de* $(E_2): y''+4y=xe^{2x}\cos(x)$, *sanchant* $2\pm i$ *n'est pas une racine de* (E_r) *donc* $y_{P2}=e^{2x}[(ax+b)\cos(x)+(cx+d)\sin(x))]$.

Dr. I.Medjadj

Cours Mathématiques 2



Chapitre 3 : Structures Algébrique



Dr. Imene Medjadj

CHAPITRE 1

Structures Algébriques

1. Lois De Composition Internes

Définition 1.1. *Soit G un ensemble, on appelle loi interne sur G toute application de $G \times G$ dans G, on note souvent une loi interne par $\star$ ou δ.*

Exemple 1.2. (1) *L'addition est une loi interne sur* $\mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b.$$

(2) *L'application*

$$\star : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \longmapsto \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$$
$$(a, b) \longmapsto a + b - 2ab$$

est une loi interne dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, en effet : $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, montrons que $a+b-2ab \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ plus précisement il faut prouver que $a+b-2ab \neq \frac{1}{2}$ car il est évident que $a + b - 2ab \in R$, on va raisonner par l'absurde on suppose que $a + b - 2ab = \frac{1}{2}$, sachant que $a \neq \frac{1}{2}$, et $b \neq \frac{1}{2}$:

$$a + b - 2ab = \frac{1}{2} \Rightarrow a(1 - 2b) + (b - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2} - b)(2a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \vee b = \frac{1}{2}$$

contradiction, alors ce qu'on a supposé est faux c'est à dire $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$, d'où $a \star b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, \star$ est une loi interne.

Définition 1.3. *Soit G un ensemble et $\star$ une loi interne.*

(1) *$\star$ est dite **commutative** si et seulement si :*

$$\forall x, y \in G, x \star y = y \star x.$$

(2) *$\star$ est dite **associative** si et seulement si :*

$$\forall x, y, z \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$$

(3) *$\star$ **admet un élement neutre** si et seulement si :*

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x \star e = e \star x = x.$$

(4) *Soit $x \in G$ on dit qu'un élément $x' \in G$ est **l'élement symétrique** ou **inverse** de x si et seulement si $x \star x' = x' \star x = e$, où $e \in G$ est l'élément neutre.*

2. Groupes

Définition 2.1. *On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi ou opération ineterne $\star$ telle que :*

1. *$\star$ admet un élément neutre.*
2. *Tout élément de G admet un élément symétrique dans G.*
3. *$\star$ est associative.*

Si de plus $\star$ est commutatif, alors $(G, \star)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Exemple 2.2.
1. *$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.*
2. *$(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'admet pas d'élément symétrique.*
3. *$(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.*

3. Anneaux

Définition 3.1. *Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $\star, \delta$, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau si :*

1. *$(A, \star)$ est un groupe commutatif.*
2. *$\forall x, y, z \in A$,*
$$x\delta(y \star z) = (x\delta y) \star (x\delta z) \, et \, (x \star y)\delta z = (x\delta z) \star (y\delta z),$$
distributivité à gauche et à droite.
3. *δ est associative .*

Si de plus δ est commutative, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau commutatif.
Si δ admet un élément neutre, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau unitaire.

Exemple 3.2. *$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif et unitaire.*

4. Corps

Définition 4.1. *Soit $\mathbb{K}$ un ensemble munie de deux lois de composition internes $\star, \delta$, on dit que $(\mathbb{K}, \star, \delta)$ est un corps si :*

1. *$(\mathbb{K}, \star, \delta)$ est un anneau unitaire.*
2. *$(\mathbb{K} - \{e\}, \delta)$ est un groupe , où e est l'élément neutre de $\star$.*

Si de plus δ est commutative, On dit que $(\mathbb{K}, \star, \delta)$ est un corps commutatif.

Exemple 4.2. *$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.*

5. Exercice Corrigé

Exercice 1. *Soit $*$ une loi définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$

(1) *Vérifier que $*$ est commutative, non associative et admet un élément neutre.*

Solution. (1) *$*$ est commutative si et seulement si :*
$\forall x, y \in \mathbb{R} / x * y = y * x.$

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y * x.$$

Car le produit et la somme sont commutatives.

(2) *$*$ est non associative, on suppose que c'est associative c'est à dire :*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$\begin{array}{rcl}
(x*y)*z & = & [xy+(x^2-1)(y^2-1)]*z \\
& = & (xy+(x^2-1)(y^2-1))z+(z^2-1)([xy+(x^2-1)(y^2-1)]^2-1) \\
& = & xyz+(x^2-1)(y^2-1)z+(z^2-1)x^2y^2+2(z^2-1)(x^2-1)(y^2-1)(xy) \\
& + & (z^2-1)(x^2-1)^2(y^2-1)^2-(z^2-1)...(1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x*(y*z) & = & x*[yz+(y^2-1)(z^2-1)] \\
& = & x(yz+(y^2-1)(z^2-1))+(x^2-1)([yz+(y^2-1)(z^2-1)]^2-1) \\
& = & xyz+x(y^2-1)(z^2-1)+(x^2-1)y^2z^2+2(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)(yz) \\
& + & (x^2-1)(y^2-1)^2(z^2-1)^2-(x^2-1)...(2)
\end{array}$$

contradiction $(1) \neq (2)$ d'où $*$ n'est pas associative

(3) *$*$ admet un élément neutre si et seulement si*

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} / x * e = e * x = x.$$

On prend juste une seule équation car la loi est commutative.

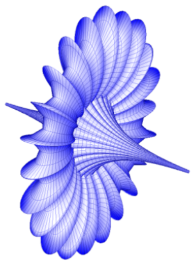
$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \mathbb{R},\ x * e & = & x \\
\forall x \in \mathbb{R},\ xe + (x^2-1)(e^2-1) & = & x \\
\forall x \in \mathbb{R},\ (e-1)(x+(x^2-1)(e+1)) & = & 0
\end{array}$$

Alors on a

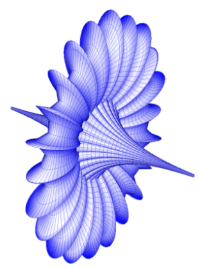
$$\begin{cases} e-1=0 \\ \vee \\ \forall x \in \mathbb{R}, x+(e+1)x^2-(e+1)=0 \end{cases}$$

On sait qu'un polynôme est nul $\forall x$ si tous ses coefficients sont tous nuls, et comme le coefficient de x est $1 \neq 0$ on déduit que le polynôme ne peut s'annuler, d'où $e=1$ est vraie. $e=1$ est l'élément neutre.

Cours Mathématiques 2



Chapitre 4 : Notion de $\mathbb{K}-$Espaces vectoriels($\mathbb{K}$ étant un Corps Commutatif)



Dr. Imene Medjadj

CHAPITRE 1

Notion de $\mathbb{K}-$ Espaces vectoriels($\mathbb{K}$ étant un Corps Commutatif) avec Exercices Corrigés

1. Espace vectoriel et sous espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (généralement c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée $(+)$:

$$(+) : E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

et d'une opération externe notée $(\cdot)$:

$$(\cdot) : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

Définition 1.1. *Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que :*

(1) $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda(\mu.x)$

(5) $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Proposition 1.2. *Si E est $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$

(2) $\forall x \in E, -1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x$

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$

(4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$

(5) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, x \cdot \lambda = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E \vee \lambda = 0_{\mathbb{K}}$

Exemple 1.3. (1) $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un* $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel,* $(\mathbb{C}, +, .)$ *est un* $\mathbb{C}-$*e.v.*

(2) *Si on considère* $\mathbb{R}^2$ *muni des deux opérations suivante*

$$(+) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ (.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$((x, y), (x', y')) \to (x + x', y + y'), \ \ (\lambda, (x, y)) \to (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

on peut facilement montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}-$*e.v.*

Définition 1.4. *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel et soit* F *un sous ensemble non vide de* E*, on dit que* F *est sous espace vectoriel si* $(F, +, \cdot)$ *est aussi un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel.*

Remarque 1.5. *Lorsque* $(F, +, \cdot)$ *est* $\mathbb{K}-$ *sous espace vectoriel de* $(E, +, \cdot)$*, alors* $0_E \in F$.
Si $0_E \notin F$ *alors* $(F, +, \cdot)$ *ne peut pas être un* $\mathbb{K}-$ *sous espace vectoriel de* $(E, +, \cdot)$.

Théorème 1.6. *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel et* $F \subset E, F$ *non vide on a les équivalences suivantes :*

(1) F *est un sous espace vectoriel de* E.

(2) F *est stable par l'addition et par la multiplication c'est à dire :*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + y \in F, \lambda.x \in F.$$

(3) $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F,$ *d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

(4) $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F,$ *d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

Exemple 1.7. (1) $\{0_E\}, E$ *sont des sous espace vectoriel de* E.

(2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ *est un sous espace vectoriel car ;*
- $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$.
- $\forall (x, y), (x', y') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que* $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in^? F$ *; c'est à dire* $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \in^? F$

$$\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = \lambda.0 + \mu.0 = 0,$$

car $(x, y) \in F \Rightarrow x + y = 0, et (x', y') \in F \Rightarrow x' + y' = 0.$
Ainsi $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in F$*,* F *est sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

(3) $F = \{(x + y + z, x - y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$*, en effet,*
- $0^3_{\mathbb{R}} = (0, 0, 0) \in F$ *car* $(0, 0, 0) = (0 + 0 + 0, 0 - 0, 0) \Rightarrow F \neq \emptyset$.
- $\forall X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que* $\lambda X + \mu Y \in^? F$ *; on a :*

$$X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x + y + z, x - y, z),$$

$$Y \in F \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / Y = (x' + y' + z', x' - y', z'),$$

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y, \lambda z) + (\mu x' + \mu y' + \mu z', \mu x' - \mu y', \mu z')$$

$$\lambda X + \mu Y = ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), \lambda z + \mu z)$$

d'où $\exists x'' = \lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}, \exists y'' = \lambda y + \mu y' \in \mathbb{R}, \exists z'' = \lambda z + \mu z' \in \mathbb{R}$, *ainsi*

$$\lambda X + \mu Y = (x'' + y'' + z'', x'' - y'', z'') \in F.$$

Théorème 1.8. *L'intersection d'une famille non vide de s.e.v est un sous espace vectoriel.*

Remarque 1.9. *La réunion de deux s.e.v n'est pas forcément un s.e.v.*

Exemple 1.10. $E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \cup E_2$ *n'est un s.e.v car* $U_1 = (1, 0), U_2 = (0, 1) \in E_2$ *et* $U_1 + U_2 = (1, 1) \notin E_1 \cup E_2$, *car* $(1, 1) \notin E_1 \wedge (1, 1) \notin E_2$.

2. Somme de deux sous espaces vectoriels

Soit E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$e.v E, on appelle somme de deux espaces vectoriels, E_1 et E_2 et on note $E_1 + E_2$ l'ensemble suivant :

$$E_1 + E_2 = \{U \in E / \exists U_1 \in E_1, \exists U_2 \in E_2 / U = U_1 + U_2\}.$$

Proposition 2.1. *La somme de deux s.e.v de* E_1 *et* E_2 *(d'un même* $\mathbb{K}$*-e.v) est un s.e.v de* E *contenant* $E_1 \cup E_2$, *i.e.,* $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$.

3. Somme directe de deux sous espaces vectoriels

On dira que la somme $E_1 + E_2$ est directe si $\forall U = U_1 + U_2$, il existe un unique vecteur $U_1 \in E_1$, un unique vecteur $U_2 \in E_2$, $U = U_1 + U_2$, on note $E_1 \bigoplus E_2$.

Théorème 3.1. *Soit* E_1, E_2 *deux s.e.v d'un même* $\mathbb{K}-$*e.v* E *la somme* $E_1 + E_2$ *est directe si* $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

3.1. Sous espace supplémentaires. Soient E_1 et E_2 deux s.e.v d'un même $\mathbb{K}-$e.v E, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E_1 \bigoplus E_2 = E$

Exemple 3.2. $E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^2$, E_1 *et* E_2 *sont supplémentaires.*

4. Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ par E.

Définitions 4.1. *Soit* E *un e.v et* $e_1, e_2 ..., e_n$ *des éléments de* E,

(1) *On dit que* $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ *sont libres ou linéairement independents, si* $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0, \textit{solution unique.}$$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.

(2) *On dit que* $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ *est une famille génératrice de* E, *ou que* E *est engendré par* $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ *si* $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}/$

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n.$$

(3) *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est une famille libre et génératrice de* E*, alors* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est appelée une base de* E*.*

Remarque 4.2. *Dans un espace vectoriel* E*, tout vecteur non nul est libre.*

Théorème 4.3. *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *et* $\{e_1^{'}, e_2^{'}..., e_m^{'}\}$ *sont deux bases de l'espace vectoriel* E*, alors* $n = m$*. En d'autre termes, si un espace vectoriel admet une base alors toutes les bases de* E *ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre la ne dépend pas de la base mais il dépend seulement de l'espace* E*. D'où la définition suivante.*

Définition 4.4. *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel de base* $B = \{e_1, e_2..., e_n\}$*, alors* $dim(E) = Card(B)$*.*
où $dim(E)$ *: est la dimension de* E *et* $Card(B)$ *: est le cardinal de* B*.*

Remarque 4.5. *donc chercher une base pour un espace vectoriel c'est trouver une famille de vecteurs dans* E*, qui forment un famille libre et génératrice de* E*, le nombre d'éléments de cette famille représente* $dimE$*.*

Exemple 4.6. (1) *Cherchons une base de* $\mathbb{R}^3$*, il faut trouver une famille de vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$ *qui engendre* $\mathbb{R}^3$ *et qui soit libre :*

$$\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (x, 0, 0)+(0, y, 0)+(0, 0, z) = x(1, 0, 0)+y(0, 1, 0)+z(0, 0, 1).$$

En posant, $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ *on voit bien que* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une famille génératrice, et aussi libre en effet ; si* $\forall\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ *:*

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1(1, 0, 0)+\lambda_2(0, 1, 0)+\lambda_3(0, 0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ *est appelée base canonique de* $\mathbb{R}^3$*.*

(2) *Montrons que les* $f_1 = (1, -1), f_2 = (1, 1)$ *il forment une base de* $\mathbb{R}^2$*, montrons que*

(a) $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice* $\Leftrightarrow \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$(x, y) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1)$$

ainsi

$$\lambda_2 = \frac{x + y}{2}, \lambda_1 = \frac{x - y}{2,}$$

donc $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice.*

(b) $\{f_1, f_2\}$ *est libre* $\forall\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1) = (0, 0) \Rightarrow 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

Théorème 4.7. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *:*

(1) *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est base de* $E \Leftrightarrow \{e_1, e_2..., e_n\}$ *est génératrice* $\Leftrightarrow \{e_1, e_2..., e_n\}$ *est libre.*

(2) *Si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *sont* p *vecteur dans* E*, avec* $p > n$*, alors* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *ne peut être libre, de plus si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *est génératrice, alors il existe* n *vecteurs parmis* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *forment une base* E*.*

(3) *Si* $\{e_1, e_2 ..., e_p\}$ *sont* p *vecteur dans* E*, avec* $p < n$*, alors* $\{e_1, e_2 ..., e_p\}$ *ne peut être génératrice de plus si* $\{e_1, e_2 ..., e_p\}$ *est libre, alors il existe* $(n-p)$ *vecteur parmis* $\{e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ *dans* E *tels que* $\{e_1, e_2 ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ *est une base pour* E*.*

(4) *Si* F *est un sous espace vectoriel de* E *alors* $dimF \leq n$*, et de plus* $dimF = n \Leftrightarrow E = F$*.*

Exemple 4.8. (1) *Dans l'exemple précédent* $f_1 = (1, -1), f_2 = (2, 1)$ *pour montrer que* $\{f_1, f_2\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$*, il suffit de montrer que* $\{f_1, f_2\}$ *est soit libre ou génératrice.(cette propriété est vraie dans le cas des espaces vectoriels de dimensions finies).*

(2) *Pour montrer que* $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice car* $dim\mathbb{R}^3 = 3, \{f_1, f_2\}$ *est libre car :* $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \textit{ (solution unique)} \end{cases}$$

donc $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

(3) *Cherchons une base pour* $F = \{(x + y, x - z, -y - z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$*, comme* $F \subset \mathbb{R}^3$ *alors* $dimF \leq 3$*, donc la base de* F *ne possède pas plus de trois vecteur.*

$$(x + y, x - z, y - z) = x(1, 1, 0) + y(1, 0, -1) + z(0, -1, -1)$$

ainsi $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, -1)$ *forment une famille génératrice pour* F*, si cette famille est libre, alors elle formera une base pour* F*.* $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) + \lambda_3(0, -1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

Donc $\{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, -1, -1)\}$ *n'est pas libre, mais d'après le théorème précédent, on peut extraire de cette famille une base de* F*, pour le faire on doit chercher deux vecteurs de famille qui sont libres, si on les trouve alors il forment une base pour* F*, si on ne trouve pas on prend un vecteur non nul et ce vecteur sera une base pour* F*. Prenons par exemple* $\{v_1, v_2\}$

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

ainsi $\{v_1, v_2\}$ *est une base pour* F *et* $dimF = 2$

5. Notion d'Application Linéaire

5.1. Généralités.

Définition 5.1. (1) *Soit $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et soit f une application de E dans F, on dit que f est une application linéaire si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x+y) = f(x) + f(y) et f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x),$$

où d'une manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

(2) *Si de plus f est bijective, on dit alors que f est un isomorphisme de E dans F.*

(3) *Une application linéaire de $(E,+,\cdot)$ dans $(E,+,\cdot)$ est dite un endomorphisme.*

(4) *Un isomorphisme de $(E,+,\cdot)$ dans $(E,+,\cdot)$ est aussi appelé un automorphisme de E dans E.*

Exemple 5.2. (1) *L'application*

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x - y$$

est une application linéaire, car : $\forall (x,y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$

$$f_1(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) = f_1(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = \lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y')$$
$$\Rightarrow f_1(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) = \lambda(x-y) + \mu(x'-y') = \lambda f_1(x,y) + \mu f_1(x',y').$$

(2) *L'application*

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (-x + y, x - 5z, y)$$

est une application linéaire, car : $\forall (x,y,z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$

$$f_2(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) = f_2(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) = (-\lambda x - \mu x' + \lambda y + \mu y', \mu x' + \mu x' - 5\lambda y - 5\mu y', \lambda y + \mu y')$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) = (-\lambda x + \lambda y, \lambda x - 5\lambda z, \lambda y) + (-\mu x' + \mu y', \mu x' - 5\mu z', \lambda y').$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) = \lambda(-x+y, x-5z, y) + \mu(-x'+y', x'-5z', y') = \lambda f_2(x,y,z) + \mu f_2(x',y',z').$$

(3) *L'application*

$$f_3 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -3x$$

est isomorphisme, en effet,f_3 est linèaire car :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f_3(\lambda x + \mu y) = -3\lambda x - 3\mu y = \lambda f_3(x) + \mu f_3(y),$$

Remarque 5.3. *On peut montrer facilement la somme de deux applications linéaires est une application linéaire, aussi le produit d'une application linéaire par un scalaire et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

PROPOSITION 5.4. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

$$1.) f(O_E) = O_F, \quad 2.) \forall x \in E, f(-x) = -f(x).$$

PREUVE. *On a,*

$$1.) f(O_E) = f(O_E + O_E) = f(O_E) + f(O_E) \Rightarrow f(O_E) = O_F.$$

$$2.) f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(O_E) = O_F \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

DÉFINITION 5.5. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

(1) *On appelle image de f et on note Imf l'ensemble défini comme suit*

$$Imf = \{y \in F / \exists x \in E : f(x) = y\} = \{f(x)/x \in E\}.$$

(2) *On appelle noyau de f et on note* $\ker f$ *l'ensemble défini comme suit :*

$$\ker f = \{x \in E / f(x) = O_F\},$$

On note parfois $\ker f$, *par* $f^{-1}(\{0\})$.

PROPOSITION 5.6. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors si $dimImf = n < +\infty$, alors n est appelé rang de f et on note $rg(f)$.*
Imf et $\ker f$ *sont des sous espaces vectoriels de E.*

EXEMPLE 5.7. (1) *Déterminons le noyau de l'application f_1,*

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x+2y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -2y\}$$

ainsi

$$\ker f = \{(-2y, y)/y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1)/y \in \mathbb{R}\}$$

donc le $\ker f$ *est un sous espace vectoriel engendré par $u = (-2, 1)$ donc il est de dimension 1, et sa base est $\{u\}$.*

(2) *Cherchons l'image de*

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (-x + y, x - z, y)$$

$$Imf_2 = \{f(x, y, z)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(-x + y, x - z, y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$Imf_2 = \{x(-1, 1, 0) + y(1, 0, 1) + z(0, -1, 0)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

donc Imf_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\}$ il est facile de montrer que cette famille est libre et donc il forment une base de $\mathbb{R}^3$ donc $dimImf_2 = 3, rg(f_2) = 3, Imf = \mathbb{R}^3$.

PROPOSITION 5.8. *Soit f une application linéaire de E dans F on a les équivalences suivantes :*

(1) *f est* ***surjective*** $\Leftrightarrow Imf = F$.

(2) *f est* ***injective*** $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.

Exemple 5.9. *Dans l'exemple $Imf_2 = \mathbb{R}^3$ donc f_2 est surjective, montrons que f_2 est injective*

$$\ker f_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f_2(x, y, z) = (0, 0, 0)\},$$

$$\Rightarrow \ker f_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (-x + y, x - z, y) = (0, 0, 0)\} \Rightarrow x = y = z = 0$$

donc $\ker f_2 = \{(0, 0, 0)\}$, ainsi f_2 est bijective.

5.2. Application Linéaire sur des espace de dimension finies.

Proposition 5.10. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espace vectoriels et f, g deux applications linéaires de E dans F. Si E est de dimension finie n et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, alors $\forall k \in \{1, 2, .., n\}, f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.*

PREUVE. *L'implication $(\Leftarrow)$ est evidente.*
Pour $(\Rightarrow)$ on a E est engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, donc $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$, comme f et g sont linéaires, alors

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(e_n),$$

$$g(x) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + ... + \lambda_n g(e_n),$$

donc si on suppose que $\forall k \in \{1, 2, .., n\}, f(e_k) = g(e_k)$ donc on déduit que $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Remarque 5.11. *Pour que deux applications linéaires f et g de E dans F soient égales il suffit qu'elles coincident sur la base du $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E.*

Exemple 5.12. *Soit g une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que*

$$g(1, 0) = (2, 1), g(0, 1) = (-1, -1)$$

alors déterminons la valeur de g en tous points de $\mathbb{R}^2$, en effet on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$g(x, y) = g(x(1, 0) + y(0, 1)) = xg(1, 0) + yg(0, 1) = x(2, 1) + y(-1, -1) = (2x - y, x - y)$$

ainsi $g(x, y) = (2x - y, x - y)$.

Théorème 5.13. *Soit f une application linéaire de E dans F avec dimension de E est finie, on a :*

$$\boxed{dimE = dim \ker f + dimIm(f)}$$

Exemple 5.14. *On a montré que $dim \ker f_1 = 1$ avec f_1 définie*

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto x + 2y$$

comme $dim\mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow dimIm(f) = dim\mathbb{R}^2 - dim \ker f_1 = 2 - 1 = 1$.

Proposition 5.15. *Soit f une application linéaire de E dans F avec $dimE = dimF = n$. On a alors les équivalences suivantes :*

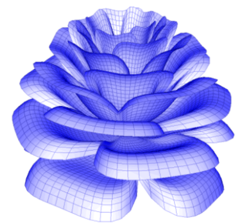
$$f \text{ est isomorphisme} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est injective}$$
$$\Leftrightarrow dimIm(f) = dimF \Leftrightarrow Imf = F \Leftrightarrow dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\},$$

de cette proposition, on déduit que si f est un isomorphisme de E dans F avec $dimE$ finie alors nécessairement $dimE = dimF$ en d'autres termes si $dimE \neq dimF$ alors f ne peut être un isomorphisme.

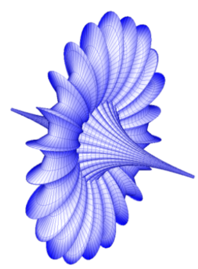
Exemple 5.16.
(1) *L'application f_1 n'est pas un isomorphisme car $dim\mathbb{R}^2 \neq dim\mathbb{R}$.*
(2) *Soit $g(x, y) = (2x - y, x - y)$, g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ on a,$dim\mathbb{R}^2 = dim\mathbb{R}^2$ est un isomorphisme car $dim \ker g = 0$ en effet :*
$$\ker g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (2x - y, x - y) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\},$$
c'est même un automorphisme.

Bon
courage!

Chapitre 5 : Notion de Matrice Associée à une Application Linéaire"



Module : Mathématiques 2 (ST/L1 2019/2020)



Dr. Imene Medjadj

CHAPITRE 1

Notion de Matrice Associée à une Application Linéaire

Définition 0.1. *On appelle une matrice dans $\mathbb{K}$ de type (n,p) un tableau rectangulaire A d'éléments de $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. L'ensemble des matrices de type (n,p) est noté $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

(1) Pour $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne, $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1p})$.

(2) Pour $p = 1$ on dit que A est une matrice ligne, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ .. \\ a_{1p} \end{pmatrix}$.

(3) Pour $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 0.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice de type $(4,3)$.*

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice de type $(2,4)$.*

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice carrée d'ordre 2.*

Définition 0.3. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ deux matrices de types (n,p),*

(1) *On dit que $A = B$ si $\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., p; a_{ij} = b_{ij}$.*

(2) *La transposée de la matrice A est une matrice notée A^t définie par*

$$A^t = (a_{ji})_{1\leq j\leq p, 1\leq i\leq n},$$

autrement dit A^t c'est la matrice de type (p,n) obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a : $(A^t)^t = A$.

Exemple 0.4. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Théorème 0.5. *En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ par les opération suivantes :*

$$\begin{aligned}(+) : \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \\ \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix}\right) &\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & ... & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\cdot) : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \\ \left(\lambda . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}\right), &\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{np} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension $n \times p$, sachant que l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$

1. Produit de deux matrices

Définition 1.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{(p,m)}(\mathbb{K})$, on définit le produit de la matrice A par B comme étant une matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$, avec $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{31}b_{3j} + ... + a_{ip}b_{pj}$.*

Remarque 1.2. (1) *L'élément C_{ij} de la matrice C se calcule en additionnant le produit des éléments de la ligne i de la matrice A par la les éléments de la colonne j de la matrice B.*

(2) *Le produit de deux matrice ne peut se faire que si le nombre de colonnes de la matrice A correspond au nombre de lignes dela matrice B.*

Exemple 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A est de type $(2, \boldsymbol{3})$ et B de type $(\boldsymbol{3}, 4)$ ainsi C sera de type $(2, 4)$.

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1.1+1.2+0.1 & 1.2+1.0+0.1 & 1.0+1.1+0.0 & 1.1+1.1+0.0 \\ 2.1+2.2+0.1 & 2.2+2.0+0.1 & 2.0+2.1+0.0 & 2.1+2.1+0.0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.4. *Le produit deux matrice n'est pas commutatif voiçi un exemple :*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Matrices carrées

Définition 2.1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$,*

(1) *La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ est appelée la diagonale principle de A.*

(2) *La trace de A est le nombre $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.*

(3) *A est dite matrice diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ c'est à dire que les éléments de A sont tous nuls sauf la diagonale principale.*

(4) *A est dite matice triangulaire supérieure (resp inférieure) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$, (resp $i < j$), c'est à dire les éléments qui sont au dessous(resp au dessus) de la diagonale sont nuls).*

(5) *A st dite symétrique si $A = A^t$.*

Exemple 2.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice diagonale.*

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice triangulaire inférieure.*

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice triangulaire supérieure .*

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, *$A_4$ est une matrice symétrique.*

Proposition 2.3. *Le produit des matrices est une opération interne dans $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et il admet un élément neutre la matrice nommée matrice identitée notée I_n définie par :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ..0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ on dit que A est invesible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$.*

Exemple 2.5. *Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et ceci en cherchant la matice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B.A$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Les Déterminants

Définition 3.1. *Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A le nombre réel donné par : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. On le note $det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,*

Exemple 3.2. *Calculons le $det(A)$,*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 0.(2) = -1.$$

Définition 3.3. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple 3.4.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\mathit{1+1}}.1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{\mathit{1+2}}0. \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{\mathit{1+3}}(-1) \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |A| = -1 + 0 - 12 = -13$$

Proposition 3.5. *Pour calculer le déterminant d'une matrice A on peut développer A suivant n'importe quelle ligne ou colonne.*

Suivant cette proposition il vaut mieux choisir la ligne ou colonne contenant le plus de zéros.

Exemple 3.6. *On reprend la même matrice de l'exemple pécédent mais calculer suivant la troisième ligne on aura :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\mathit{3+1}}.0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{\mathit{3+2}}.1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{\mathit{3+3}}.0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 0 - 13 + 0 = -13$$

on calcule juste un déterminant au lieu de trois.

Définition 3.7. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathit{1+1}} a_{\mathit{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{\mathit{1+2}} a_{\mathit{12}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{\mathit{1+3}} a_{\mathit{13}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{\mathit{1+4}} a_{\mathit{14}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Définition 3.8. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$,*
le déterminant suivant la j-ème colone est :

$$det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + ... + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}, j = 1, ..., n.$$

Le déterminant suivant la i-ème ligne est :

$$det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + ... + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}, i = 1, ..., n.$$

Où A_{ij} représent ce que nous appelons le déterminant mineur du terma a_{ij}, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu de $det(A)$ en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Proposition 3.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

(1) $det(A) = det(A^t)$.

(2) $det(A) = 0$ *si deux lignes de A sont égales (ou deux colonnes).*

(3) $det(A) = 0$ *si deux lignes de A sont proportinnelles (ou deux colonnes le sont).*

(4) $det(A) = 0$ *si une ligne est combinaison linéaires de deux autres lignes de A (même chôse pour les colonnes).*

(5) $det(A)$ *ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaires d'autres lignes (même chôse pour les colonnes).*

(6) *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $det(A.B) = det(A).det(B)$.*

Exemple 3.10. (1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, *car la ligne 1 est égale à la ligne 3,* $L_1 = L_3$.

(2) $|B| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -15 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *car* $L_1 = 3 * L_4$.

(3) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, *car* $C_1 = C_2$.

Définition 3.11. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on appelle déterminant des vecteurs $(V_1, V_2, ..., V_n)$ et on le note $det(V_1, V_2, ..., V_n)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$.*

Exemple 3.12. *Soit $V_1 = (1,1,0), V_2 = (0,-1,1), V_3 = (0,0,1)$, alors*

$$det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Proposition 3.13. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow det(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0$*

Exemple 3.14. *Soit $V_1 = (1,2,0), V_2 = (0,-1,1), V_3 = (0,0,1)$, forment une base de $\mathbb{R}^3$, car $det(V_1, V_2, V_3) = -1 \neq 0$.*

3.1. Le rang d'un matrice.

DÉFINITION 3.15. *Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, on appelle rang de A et on note rgA l'ordre de la plus grande matrice carrée B prise (extraite) dans A telle que $detB \neq 0$.*

EXEMPLE 3.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, detA = 2 \neq 0, rgA = 2.$
$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, detA = 0 \neq 0, rgA = 1.$
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, rgA < 4 (rgA \leq 3)$ *la plus grande matrice carrée contenue dans A est d'ordre 3, dans cet exmple on a : 4 possibilité :*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$detC_1 = detC_2 = 0$ *et* $detC_3 = detC_4 = 0$ *donc le* $rgA < 3$ *et on a :*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2.$$

THÉORÈME 3.17. *le rang d'une matrice est égale au nombre maximale de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.*

DÉFINITION 3.18. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle cofacteur d'indice i et j de A le scalaire*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}.$$

Avec A_{ij} est la matrice déduite de A par suppression de la ligne i t la colonne j.
La matrice $C = (c_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice C^t est appellée la comatrice de A.

EXEMPLE 3.19. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. *Calculons les coffacteurs de A*

$$c_{11} = (-1)^{1+1} det(A_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} det(A_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} det(A_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} det(A_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} det(A_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} det(A_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} det(A_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} det(A_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} det(A_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et la comatrice et

$$C^t = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.20. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$A \textit{est inversible } \Leftrightarrow det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas la matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t.$$

Où C^t est la comatrice de A.

Exemple 3.21. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $det(A) = 2 \neq 0$ donc elle est inversible, de plus*

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

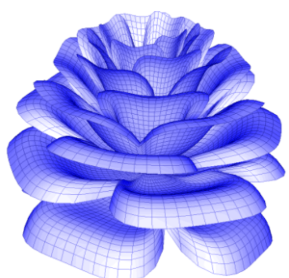
On peut vérifier que $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$.

Bon ☺
courage!

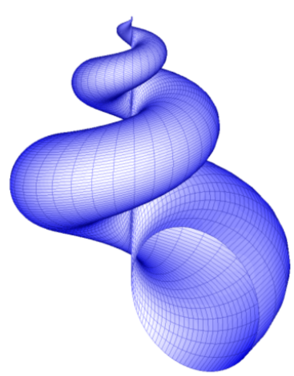
Dr. I.Medjadj

Cours de Mathématiques 2

Chapitre 6 : Systèmes d'équations linéaires



Imene Medjadj



0.1 Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle système de n équations linéaires à p inconnus à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

où les $(x_j)_{j=1,..,p}$ sont les inconnues, les $(a_{ij}), b_j \in \mathbb{K}$.

`1)Forme matricielle du système :`

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Le système (S) devient ; $AX = B$.

Si f est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que que A soit la matrice associée à f suivant les bases canoniques et si on note par $X = (x_1, ..., x_p)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$, le système (S) devient $f(X) = B$.

`2)Solution du système :`

Définition 0.1.1. *On appelle solution du système (S) tout élément $X = (x_1, ..., x_p)$ vérifiant les n équations de (S) ceci revient à trouver un vecteur X tel que $AX = B$ ou encore un élément $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $f(X) = B$.*

Exemple 0.1.2.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

`3)Rang d'un système linéaire :`

Le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. Si r est le rang du système linéaire (S), alors $r \leq n$ et $r \leq p$.

0.1.1 Système de Cramer

Définition 0.1.3. *Le système (S) est dit de Cramer si $n = p = r$ c'est à dire, (S) est un système de n équations à n inconnus et telle que*

$$detA \neq 0.$$

Théorème 0.1.4. *Tout Le système de Cramer admet une solution donnée par : $X = A^{-1}B$.*

Exemple 0.1.5.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B$$

$detA = 1 \neq 0, rgA = 2,$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Théorème 0.1.6. *Dans un système de Cramer, la solution est donnée par les formules :*

$$x_i = \frac{detA_i}{detA}, i = 1, ..., n.$$

Où les A_i est la matrice réduite de A, en remplaçant la colonne i par le vecteur B.

Exemple 0.1.7.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$detA = 4 \neq 0, rgA = n = p = 3$ *((S) est un système de cramer).*

$$x = \frac{detA_1}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 9/7.$$

$$y = \frac{detA_2}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -5/7.$$

$$z = \frac{detA_3}{detA} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = -1/7.$$

3)Cas où $n = p$ et $r < n$:

Si on considère maintenant un système de n équations à n inconus, mais $rgA < n$ c'est à dire

$$detA = 0,$$

dans ce cas on extrait une matrice M de A sachant que c'est la plus grande matrice carrée inversible c'est à dire $detM \neq 0$ contenue dans A et d'ordre r c'est ce qu'on appelle une sous-matrice, les inconnus associés à M deviennent des inconnus principales et les $(n - r)$ autres inconnus deviennent des paramètres où bien ce qu'on appelle valeurs arbitraires et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r & = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r & = b_2(a_{2r+1}x_{r+1} + ... + a_{2n}x_n) = b'_2 \\ : & : \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r & = b_n(a_{rr+1}x_{r+1} + ... + a_{rn}x_n) = b'_r \end{cases}$$

ce dernier est un système de cramer, donc il admet une seule solution $(x_1, ..., x_r)$ qui dépend de $(x_{r+1}, ..., x_n)$. Si cette solution vérifie les $(n - r)$ équations restantes, alors le système globale admet une infinité de solutions. Si par contre $(x_1, ..., x_r)$ ne vérifie pas une seule équation parmis les $(n - r)$ équations restantes alors le système globale n'admet de solution.

Exemple 0.1.8.

$$(S) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$detA = 0$ (S) n'est pas un système de Cramer comme $|A'| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Alors $rgA = 2$ et on considère x, y les inconnus et z paramètre, alors on obtient le système :

$$\begin{cases} 3x - y = & 3 - 2z \\ 2x + 2y = & 2 - z \end{cases}$$

qui est un système de Cramer et admet une unique solution (x, y) dépendante de z.

$$x = 1/8 \begin{vmatrix} 3 - 2z & -1 \\ 2 - z & 2 \end{vmatrix} = 1 - (5/8)z$$

$$y = 1/8 \begin{vmatrix} 3 & 3 - 2z \\ 2 & 2 - z \end{vmatrix} = 1/8z$$

Reste à voir si (x, y) vérifie $x - 3y + z = 1$(équation réstante) on a : $1 - 5/8z - 3/8z + z = 1 \Rightarrow 1 = 1$(vraie $\forall t \in \mathbb{R}$) donc le système admet une infinité de solutions données par :

$$(1 - 5/8z, 1/8z, z)/z \in \mathbb{R}.$$

`3)Cas où` $n \neq p$ `:`

Si le nombre d'équations n'est pas égale au nombre d'inconnus, alors on cherche d'abord le rang de A et on procède comme précédement. Si M est une matrice contenue dans A et d'ordre r et $detM \neq 0$ alors on considère le système de r équations à r inconnus correspondant à M qui est un système de Cramer.
Si la solution vérifie les équation restantes alors le système globale admet une infinité de solutions sinon il n'admet aucune solution.

Exemple 0.1.9.

$$(S) : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

le rang de $A \leq 2$ choisissons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow detM = 8 \neq 0 \Rightarrow rgM = 2.$$

on prend le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11/8 \\ y = 1/8 \end{cases}$$

on a l'équation réstante :

$$x - 5y = -5 \Rightarrow 11/8 - 5/8 = 6/8 = 3/2 \neq -5$$

alors le système n'admet pas de solutions.

Dr. I.Medjadj